

3. ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО И ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЙ

Основное уравнение динамики материальной точки (второй закон

Ньютона): $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m\vec{a}$.

Основной закон динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси:

$M_z = J_z \varepsilon$, где ε - угловое ускорение, J_z - момент инерции тела относительно оси z.

Момент инерции тел массой m относительно оси, проходящей через центр масс:

кольца радиуса R $J = mR^2$

сплошного диска(цилиндра) $J = \frac{1}{2} mR^2$

тонкого стержня $J = \frac{1}{12} mR^2$

3.1. На обод маховика диаметром 60см намотан шнур, к концу которого привязан груз с массой 2 кг. Определить момент инерции маховика, если он вращаясь равноускоренно под действием груза, за время $t=3$ с приобрел угловую скорость 9 рад/с. Ответ: 1,78 кг·м².

3.2. Вал в виде сплошного цилиндра массой $m_1=10$ кг насажен на горизонтальную ось. На цилиндр намотан шнур, к свободному концу которого подвешена гиря массой $m_2=2$ кг. С каким ускорением будет опускаться гиря, если ее предоставить самой себе? Ответ: 2,8 м/с².

3.3. С какими ускорениями будут двигаться тела в предыдущей задаче и какой будет сила натяжения нити, если в оси цилиндра действует сила трения, создающая тормозящий момент 1,2 Н·м, а радиус цилиндра равен 0,1м? Ответ: 1,14 м/с²; 22,3 Н.

3.4. Массы грузов, показанных на рис.1, $m_1=1,5$ кг, $m_2=2$ кг, масса блока $m_3=1$ кг. Коэффициент трения между грузом m_1 и горизонтальной поверхностью стола, по которому этот груз движется, равен $\mu=0,2$. С каким ускорением движутся грузы? Ответ: 8 м/с².

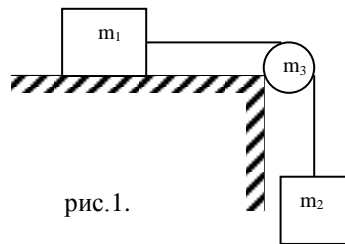


рис.1.

3.5. На горизонтальной поверхности стола находится тележка с массой $m_1=5$ кг. К тележке привязали легкую нить, которую перебросили через блок (масса $m_3=2$ кг, радиус $0,1$ м), а к концу ее прикрепили гирию с массой $m_2=3$ кг (рис. 1). Какую кинетическую энергию будет иметь эта система тел спустя $0,5$ с после начала движения? Трением пренебречь. Ответ: $12,5$ Дж.

3.6. На горизонтальной поверхности стола находится тележка с массой $m_1=0,5$ кг. К тележке привязали легкую нить, которую перебросили через блок (масса $m_3=0,2$ кг, радиус $0,1$ м), а к концу ее прикрепили гирию с массой $m_2=0,3$ кг (рис. 1). В оси блока действуют силы трения, создающие тормозящий момент $M_{\text{торм}}=0,1$ Н·м. Коэффициент трения между поверхностью стола и тележкой равен $\mu=0,1$. Какую кинетическую энергию будет иметь эта система тел спустя $0,5$ с после начала движения? Ответ: $0,3$ Дж.

3.7. На блок с массой $m_1=5$ кг и радиусом 10 см намотана нить, к концу которой привязан груз с массой $m_2=1$ кг. При поступательном движении груза вниз на вращающийся блок со стороны оси действует сила трения, создающая тормозящий момент $M_{\text{торм}}=0,5$ Н·м. С каким ускорением будет при этом опускаться груз? Ответ: $1,43$ м/с²

3.8. На вал в виде цилиндра с горизонтальной осью вращения намотана невесомая нить, к концу ее прикреплен груз. Какую угловую скорость будет иметь вал спустя 2 с после начала движения груза, если масса вала 4 кг, его радиус 20 см, масса груза $0,2$ кг, действием сил трения на движущиеся тела можно пренебречь. Ответ: $8,9$ рад/с.

3.9. Гирия массой 1 кг опускается вертикально на легкой нити с высоты $0,5$ м. Верхняя часть нити намотана на цилиндрический блок с массой $0,8$ кг и радиусом $0,15$ м. Блок вращается вокруг горизонтальной оси, со стороны которой на блок действует сила трения, создающая тормозящий момент $M_{\text{торм}}=0,2$ Н·м. Сколько времени до остановки будет вращаться блок после того, как гирия упадет на землю? Ответ: $0,75$ с.

3.10. На цилиндрический блок массой 1 кг с горизонтальной осью вращения намотана невесомая нить, которая переброшена через второй такой же блок, находящийся на одном горизонтальном уровне с первым. К концу нити привязали груз массой $0,8$ кг и отпустили. С какими ускорениями будут двигаться тела системы? Какой будет сила натяжения нити между блоками? Ответ: $4,4$ м/с², $2,2$ Н.

3.11. Найти ответы на вопросы предыдущей задачи, если в осях блоков действуют силы трения, создающие тормозящие моменты по $0,1$ Н·м, а радиусы блоков равны $0,1$ м. Ответ: $3,2$ м/с², $1,6$ Н.

3.12. Система тел состоит из двух грузов с массами $m_1=2\text{ кг}$, $m_2=3\text{ кг}$ и блока в форме цилиндра массой $m_3=4\text{ кг}$, закрепленного на вершине наклонной плоскости с углом наклона $\alpha=30^\circ$ и легкой нерастяжимой нити, которая перекинута через блок и своими концами прикреплена к грузам m_1 и m_2 (рис.2).

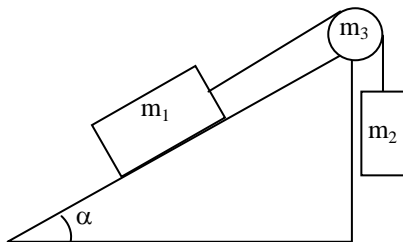


рис.2.

Определить ускорение груза m_2

в процессе движения всех тел. Трением пренебречь. Ответ: $2,8\text{ м/с}^2$.

3.13. Каким станет ускорение грузов задачи 3.12, если между телом m_1 и наклонной плоскостью будет действовать сила трения с коэффициентом $\mu=0,5$? Ответ: $1,6\text{ м/с}^2$.

3.14. Во сколько раз отличаются силы натяжения вертикального и наклонного участков нити в задаче 3.12 в случаях, когда: 1) трения нет, 2) вдоль наклонной плоскости действует сила трения с коэффициентом $\mu=0,2$? Ответ: $0,73, 0,67$.

3.15. Вычислить кинетическую энергию всех тел системы, описанной в задаче 3.12, спустя $0,5\text{ с}$ после начала ее движения, если в оси блока действует сила трения, создающая тормозящий момент $M_{\text{торм}}=0,5\text{ Н}\cdot\text{м}$, а радиус блока равен 8 см . Ответ: $3,15\text{ Дж}$.

3.16. Для системы тел, изображенных на рис.2, известно, что $\alpha=20^\circ$, $m_1=2\text{ кг}$, масса блока $m_3=2\text{ кг}$, коэффициент трения между наклонной плоскостью и грузом m_1 равен $\mu=0,1$. Какой по массе груз m_2 нужно прикрепить к вертикальному участку нити, чтобы он двигался с ускорением 1 м/с^2 ? Ответ: $1,1\text{ кг}$.

3.17. Невесомая нить намотана на цилиндр радиусом 30 см и массой 2 кг , переброшена через невесомый блок, находящийся на одном горизонтальном уровне с цилиндром, а к концу ее прикреплена гири с массой $0,5\text{ кг}$. Найти кинетические энергии цилиндра и гири через $0,5\text{ с}$ после начала движения системы тел. Трением в осях цилиндра и блока пренебречь. Ответ: $1,3\text{ Дж}, 0,6\text{ Дж}$.

3.18. Через блок в виде однородного сплошного цилиндра с горизонтальной осью вращения массой 160 г перекинута невесомая нить, к концам которой подвешены грузы с массами 200 г и 300 г . Пренебрегая трением в оси блока, определить ускорения грузов и силы натяжения нитей. Ответ: $1,5\text{ м/с}, 2,3\text{ Н}, 2,5\text{ Н}$.

3.19. Определить ускорения грузов предыдущей задачи, если в оси блока действует сила трения, создающая тормозящий момент $M_{\text{торм}}=0,04\text{ Н}\cdot\text{м}$, а радиус блока равен 10 см . Ответ: 1 м/с .

3.20. Дан блок массой $M=2\text{ кг}$ и радиусом $R=0,6\text{ м}$ и бруски массами $m_1=2\text{ кг}$, $m_2=3\text{ кг}$ (рис.3). Найдите угловое ускорение блока и натяжение нити между 1 и 2 брусками. Ответ: $13,6\text{ рад/с}^2$, $4,9\text{ Н}$.

3.21. Легкая нить переброшена через цилиндрический блок радиусом 10 см и массой $0,8\text{ кг}$ с горизонтальной осью вращения. К концам нити прикрепили грузы с массами $0,5$ и $0,4\text{ кг}$. Пренебрегая трением в оси блока, найти скорости вращения блока и движения грузов спустя 1 с после начала движения. Ответ: $7,5\text{ рад/с}$, $0,75\text{ м/с}$.

3.22. Найти ответы на вопросы предыдущей задачи, если в оси блока будет действовать сила трения, создающая тормозящий момент $0,04\text{ Н}\cdot\text{м}$. Ответ: $7,2\text{ рад/с}$, $0,72\text{ м/с}$.

3.23. Невесомая нить переброшена через блок массой $m_3=2\text{ кг}$, имеющий форму цилиндра. К концам нити прикреплены грузы с массами $m_1=2\text{ кг}$ и $m_2=1\text{ кг}$. Определить ускорение грузов в процессе движения тел. Трением пренебречь. Ответ: $2,45\text{ м/с}^2$.

3.24. С каким ускорением будут двигаться грузы предыдущей задачи, если в оси блока действует сила трения, создающая тормозящий момент $M_{\text{тр}}=0,1\text{ Н}\cdot\text{м}$, а радиус блока равен 5 см ? Ответ: $1,95\text{ м/с}^2$.

3.25. Каким должен быть момент сил трения в оси блока m_3 задачи 3.23, чтобы ускорения грузов m_1 и m_2 в процессе их движения оказалось равным $0,7\text{ м/с}^2$? Радиус блока 5 см . Ответ: $0,35\text{ Н}\cdot\text{м}$.

3.26. Блок массой $0,4\text{ кг}$, имеющий форму диска (цилиндра), вращается вокруг горизонтальной оси под действием силы натяжения нити, которая переброшена через блок и к концам которой подвешены грузы с массами $0,3$ и $0,7\text{ кг}$. Определить силы натяжения нити по обе стороны блока. Ответ: $3,9\text{ Н}$, $4,6\text{ Н}$.

3.27. Система тел, описанная в задаче 3.26, приобрела через секунду после начала движения кинетическую энергию $2,4\text{ Дж}$. Найти по этим данным момент сил трения, действующих в оси блока. Радиус блока равен 5 см . Задачу решить с применением законов Ньютона. Ответ: $1,5\text{ Н}$.

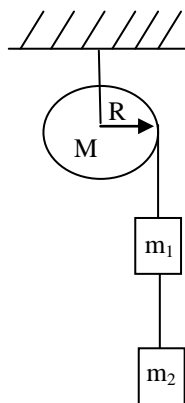


рис.3.

4. КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Возвращающаяся квазиупругая сила, действующая на колеблющееся тело:

$$F = -kx,$$

где x -смещение тела от положения равновесия; k - коэффициент квазиупругой силы.

Уравнение гармонических колебаний:

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где A -амплитуда, t -время, φ_0 -начальная фаза, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}$ -круговая частота колебаний, T -период колебаний.

4.1. Уравнение колебаний точки имеет вид: $x = A \cdot \cos \omega(t + \tau)$, где $A=0,02$ м, $\omega = \pi \text{ с}^{-1}$, $\tau = 0,2$ с. Определить период, начальную фазу колебаний точки и её ускорение в момент времени 1 с. Ответ: $T=2$ с; $\varphi_0=0,2\pi$ рад; $a=0,16 \text{ м/с}^2$.

4.2. Определить период, частоту и начальную фазу колебаний точки, движущейся по уравнению: $x = A \cdot \sin \omega(t + \tau)$ где $\omega=2,5\pi \text{ с}^{-1}$, $\tau=0,4$ с, $A=0,02$ м. Какова скорость точки в момент времени 0,8 с. Ответ: $T=0,8$ с; $\nu=1,25 \text{ с}^{-1}$; $V=0,157 \text{ м/с}$.

4.3. Точка совершает колебания по закону $x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$, где $A=2\text{см}$, $\omega=\pi \text{ с}^{-1}$, $\varphi=\pi/4$ рад. Построить графики зависимости от времени смещения, скорости и ускорения точки.

4.4. Точка равномерно движется по окружности против часовой стрелки с периодом 6 с. Диаметр окружности 20 см. Написать уравнение движения проекции точки на ось, проходящую через центр окружности, если в момент времени, принятый за начальный, проекция точки на эту ось равна нулю. Найти смещение, скорость и ускорение в момент времени 1 с. Ответ: $x = -0,1 \cdot \sin \frac{\pi}{3} t$; $x=-0,087$ м; $V=-0,052\text{м/с}$; $a=0,095 \text{ м/с}^2$.

4.5. Определить максимальные значения скорости и ускорения точки, совершающей гармонические колебания с амплитудой 3 см и круговой частотой $\pi/2 \text{ с}^{-1}$. Написать уравнение скорости точки, если в начальный момент времени точка находилась в положении амплитудного отклонения.

$$\text{Ответ: } V(t) = 0,015\pi \sin \frac{\pi}{2} t; V_{\max} = 0,015\pi \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right); a_{\max} = 7,5 \cdot 10^{-3} \pi^2 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right).$$

4.6. Точка совершает колебания по закону $x = A \cdot \cos \omega t$, где $A=5$ см, $\omega=2 \text{ с}^{-1}$. Определить ускорение точки в тот момент времени, когда её

скорость равна 8 см/с. Каково максимальное ускорение точки? Ответ: $a = -0,12 \text{ м/с}^2$; $a_{\max} = 0,2 \text{ м/с}^2$.

4.7. Точка совершает гармонические колебания. Наибольшее смещение точки равно 10 см, наибольшая скорость 20 см/с. Найти круговую частоту колебаний и максимальное ускорение точки. Написать уравнение колебаний точки, если известно, что они совершаются по закону косинуса, а в начальный момент времени точка находилась в максимальном отрицательном отклонении. Ответ: $\omega = 2\pi \text{ с}^{-1}$; $a_{\max} = 0,4 \text{ м/с}^2$; $x(t) = 0,1 \cos(2t + \pi) \text{ м}$.

4.8. Максимальная скорость точки, совершающей гармонические колебания, равна 10 см/с, а максимальное ускорение 100 см/с^2 . Найти круговую частоту колебаний, их период и амплитуду. Написать уравнение колебаний, если известно, что они совершаются по закону косинуса, и что в начальный момент времени точка проходила положение равновесия. Ответ: $\omega = 10 \text{ с}^{-1}$; $T = 0,2\pi \text{ с}$; $A = 0,01 \text{ м}$; $x(t) = 0,01 \cdot \cos 10t \text{ м}$.

4.9. Точка совершает колебания по закону $x = A \sin \omega t$. В некоторый момент времени смещение x_1 точки оказалось равным 5 см. Когда фаза колебаний увеличилась вдвое, смещение x_2 стало равным 8 см. Найти амплитуду колебаний. Ответ: $A = 0,083 \text{ м}$.

4.10. Колебания точки происходят по закону $x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$. В некоторый момент времени смещение точки равно 5 см, её скорость 20 см/с , а ускорение -80 см/с^2 . Найти амплитуду, круговую частоту, период колебаний и фазу в рассматриваемый момент времени. Ответ: $A = 7,1 \text{ см}$; $\omega = 4 \text{ с}^{-1}$; $T = 0,5 \pi \text{ с}$; $\varphi_1 = \pi/4$.

4.11. Начальная фаза гармонических колебаний равна нулю. При смещении точки от положения равновесия на 2,4 см её скорость равна 3 см/с, а при смещении 2,8 см скорость равна 2 см/с. Найти амплитуду и период колебаний. Ответ: $T = 4,1 \text{ с}$; $A = 3,1 \text{ см}$.

4.12. Точка совершает колебания вдоль оси x по закону $x = A \sin(\omega t - \varphi_0)$. Построить графики проекции скорости и ускорения как функций времени. По графикам найти, каково ускорение точки в моменты времени, когда скорость имеет максимальное по модулю значение. Принять $\varphi_0 = \pi/2$ и $A = 2 \text{ см}$. Ответ: $a = 0 \text{ м/с}^2$.

4.13. Частица совершает гармонические колебания вдоль оси x около положения равновесия $x = 0$. Круговая частота колебаний равна 4 рад/с. В некоторый момент времени координата частицы 25 см, и её скорость 100 см/с . Найти координату и скорость частицы через 2,4 с после этого момента. Ответ: $x = -0,29 \text{ м}$; $V = -0,81 \text{ м/с}$.

4.14. Написать уравнение гармонических колебаний, если они совершаются по закону синуса, амплитуда колебаний 5 см, период

колебаний 8 с для начальной фазы: 1) 0, 2) $\pi/4$, 3) $\pi/2$, 4) π . Начертить графики колебаний для этих случаев.

4.15. Уравнение колебаний материальной точки массой 16 г имеет вид $x = 0,1 \sin(0,125\pi \cdot t - \pi/4)$. (м, с). Построить графики зависимости от времени координаты, кинетической энергии и силы, действующей на точку. Сравнить их. Найти максимальное значение силы. Ответ: $F_{\max} = 2,4 \cdot 10^{-4} \text{ Н}$.

4.16. Материальная точка массой 10 г колеблется по уравнению $x = 5 \sin(0,2\pi \cdot t - \pi/4)$. (см, с). Найти максимальную силу, действующую на точку, и её полную энергию. Ответ: $F_{\max} = 0,2 \text{ мН}$; $W = 4,9 \text{ мкДж}$.

4.17. Уравнение колебаний материальной точки массой 16 г имеет вид $x = 0,2 \sin(0,25\pi \cdot t - \pi/4)$ (см,с). Найти кинетическую и потенциальную энергию в момент времени, когда действующая на неё сила равна половине амплитудного значения. Ответ: $1,5 \cdot 10^{-8} \text{ Дж}$; $0,5 \cdot 10^{-8} \text{ Дж}$.

4.18. Чему равно отношение кинетической энергии точки, совершающей гармонические синусоидальные колебания, к её потенциальной энергии для моментов времени $T/12$ и $T/8$, где T – период колебаний. Начальная фаза колебаний равна нулю. Ответ: 3; 1.

4.19. Чему равно отношение кинетической энергии точки, совершающей гармонические синусоидальные колебания, к её потенциальной энергии для моментов времени, когда смещение точки от положения равновесия составляет 0,25A, 0,5A, A, где A – амплитуда колебаний. Ответ: 15; 3; 0.

4.20. Полная энергия тела, совершающего гармонические колебания, равна $3 \cdot 10^{-5} \text{ Дж}$. Максимальная сила, действующая на тело, равна $1,5 \cdot 10^{-3} \text{ Н}$. Написать уравнение движения этого тела, если период колебаний равен 2 с и начальная фаза 60° . Ответ: $x = 0,04 \sin(\pi \cdot t + \pi/3)$.

4.21. Амплитуда гармонических колебаний материальной точки 2 см, полная энергия $3 \cdot 10^{-7} \text{ Дж}$. При каком смещении от положения равновесия на колеблющуюся точку действует сила $2,25 \cdot 10^{-5} \text{ Н}$? Ответ: $1,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$.

4.22. Материальная точка совершает колебания согласно уравнению $x = 0,02 \cdot \cos(\pi \cdot t - \pi/2)$, (м, с). Определите 1) амплитуду колебаний; 2) период колебаний; 3) начальную фазу колебаний; 4) максимальную скорость точки; 5) максимальное ускорение точки; 6) через сколько времени после начала движения точка будет проходить через положение равновесия. Ответ: 1) 0,02 м; 2) 2 с; 3) $\pi/2$; 4) $0,02\pi \text{ м/с}$; 5) $0,02\pi^2 \text{ м/с}^2$; 6) 1 с.

4.23. Материальная точка массой $m = 50 \text{ г}$ совершает гармонические колебания согласно уравнению $x = 0,1 \cdot \cos(3\pi/2 \cdot t)$ м.

Определите: 1) возвращающую силу для момента времени $t=0,5$ с; 2) полную энергию точки. Ответ: 1) 78,5 мН; 2) 5,55 мДж.

4.24. Определите отношение кинетической энергии точки, совершающей гармонические колебания, к её потенциальной энергии, если известна фаза колебаний φ . Ответ: $W_k/W_p = \tan^2 \varphi$.

4.25. Материальная точка колеблется согласно уравнению $x = A \cdot \cos \omega_0 t$ где $A=5$ см, $\omega_0 = \pi/12$ с⁻¹. Когда возвращающая сила в первый раз достигает значения -12 мН, потенциальная энергия точки оказывается равной 0,15 мДж. Определите этот момент времени и соответствующую этому моменту фазу $\omega_0 t$. Ответ: $t=4$ с; $\omega_0 t = \pi/3$ рад.

4.26. Однородный стержень положили на два быстро вращающихся блока, как показано на рис.1. Расстояние между осями блоков $l=20$ см, коэффициент трения между стержнем и блоками $k=0,18$. Показать, что стержень будет совершать гармонические колебания. Найти их период. Ответ: 1,5 с.

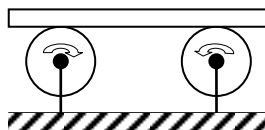


рис.1.

4.27. Найти период малых вертикальных колебаний шарика массы 40 г, укрепленного на середине горизонтально натянутой струны длины 1 м. Натяжение струны считать постоянным и равным 10 Н. Ответ: 0,2 с.

4.28. Вычислить период малых колебаний ареометра (рис.2), которому сообщили небольшой толчок в вертикальном направлении. Масса ареометра $m=50$ г, радиус его трубки $r=3,2$ мм, плотность жидкости $\rho=1,00$ г/см³. Сопротивление жидкости считать пренебрежимо малым. Ответ: 2,5 с.

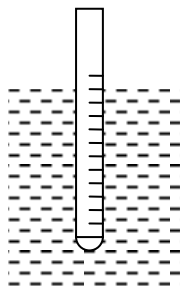


рис.2.